

# 3D 結合網平均計算の実用化に向けて

技術委員会 位置情報・応用計測部会 3D 結合網平均計算実用化WG

## はじめに

測量データである角（方位角、水平方向、水平夾角、高低角）、距離、水準比高、基線ベクトル及び座標の異種観測値を、3次元空間で同時処理するのが、欧米では一般的である。今回、欧米の技術を確認し、普段利用している技術との違いを学ぶ目的で、2010年3月、位置情報・応用計測部会に「3D 結合網平均実用化WG」を組織した。

当WGでは、

①異種観測値の同時処理の効果  
②観測値の重量の考察  
③統計的仮説検定による測量成果の品質評価について議論を進めてきたことを以下に報告する。

なお、本稿では「公共測量作業規程の準則」を単に「準則」と呼ぶ。

## 1. 具体的な3D網の例

以下に、3D網処理の具体的な効果について述べる。

### 1.1 TS観測値の3D処理

TS（トータルステーション）による観測値は、水平角、高低角及び距離の3Dデータである。準則は、この3Dデータを水平及び高低に別々に分割した処理を行っている。

**疑問：**高低観測の重量をどのように決めるのかが不明

表 1.1 高低角観測の許容範囲の標準偏差

1級	2級	3級	4級
12"	15"	20"	30"

**提案：**表 1.1 は準則第 43 条に規定された高低角観測の許容範囲の標準偏差である。

ここに示された許容範囲は  $3\sigma$  の値とみなし、その  $1/3$  を高低角観測の標準偏差  $\sigma_V$  とする。例えば 4 級であれば「10"」となる。高低角の重量は  $p_V = 1/\sigma_V^2$  とする。距離及び方向の重量は、準則に示された数値を使う。詳しくは「2.2 観測値の重量」参照。

### 1.2 TS と GNSS 観測

現行規定による TS と GNSS の結合処理は、既知点座標を固定するが、3D 結合網では、既知点座標を観測値として扱う。

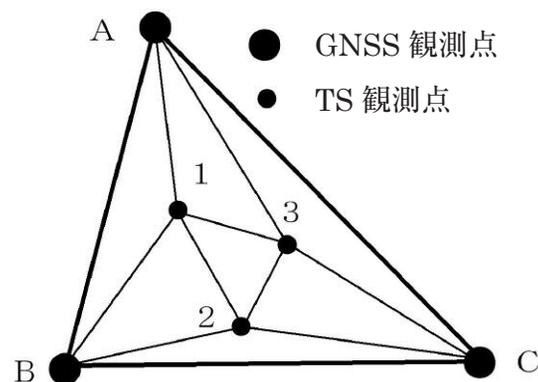


図 1.1 GNSS・TS 結合網

例えば、図 1.1 に示した GNSS・TS の結合網がある場合、現行規定は GNSS 観測点 A、B 及び C 点の GNSS 観測座標値が固定され、それらを既知点として TS 観測点 1、2 及び 3 の点が決められる。もし、GNSS 観測点 C においてマルチパスのような誤差がある場合、その C 点の座標誤差は一方的に TS 観測値にしわ寄せされてしまう。座標値を観測値として扱い重み付けすることにより、座標も誤差

の分担を担うことになり、TS 観測値と折合いが合った最適な解が得られることになる。なお、座標の重量を無限大とした場合、座標値を固定したことに相当する。

**疑問：**座標を観測値として扱う場合のアルゴリズムなどが不明である。

**議論：**多くの文献があるが、原田(2001, 23 頁)は、“自然解法”として、座標を観測値扱いとした処理を行っている。

**提案：**公共測量においても、階層構造をなくし、1 級～4 級基準点測量を 3D 同時処理が有効である。

**提案：**最近では偏心を行わないような測量方法が多いが、上空視界がとれない既知点の GNSS 観測の場合、TS 観測と組合せは有効である。

### 1.3 基準点網の階層構造の省略

2010 年の地籍調査作業規程準則の改正により、筆界点上におけるネットワーク型 RTK による座標観測（いわゆる単点観測）が規定され、電子基準点から直接筆界点の座標を決定することができるようになった。

一方、「平成 19 年 11 月 26 日、日調連発第 283 号、地積測量図作成におけるネットワーク型 RTK-GPS 測量について(通知)」は、“现阶段で筆界点到直接 GPS のアンテナを設置して観測する同方式は適当ではないが、例えば、基本三角点等が近傍に存在しない場所において、恒久的地物に世界測地系による座標値を与えるためにこの方式を用い、この恒久的地物を与点として一筆地測量を実施することは差し支えない”としている。

いずれの場合も、従来の基準点測量の階層構造の省略を可能にしている。

図 1.2 に示すように、従来どおり TS を使って細部図根測量と一筆地測量を行う。地積測量図作成も同様に、従来どおりの一筆値測量

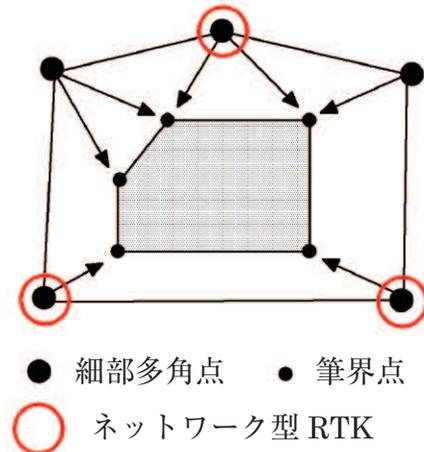


図 1.2 地籍測量（一筆地測量）

を行う。いずれの場合も、上空視界が良好な細部図根点又は恒久的地物上での座標観測を行う。座標観測値は、分散をもった観測値として扱うことによって、より正確な網全体の座標が得られる。

**疑問：**ネットワーク型 RTK の座標精度が十分ではない。

**議論：**現行作業規程による座標精度の許容範囲は、10cm で、ネットワーク型 RTK で得られた観測値の方が、座標精度が高いといえる。

**疑問：**基準点の階層構造の廃止等に伴う積算上の問題が生じるのではないか。

**議論：**3D 結合網は高等技術なので、“高級主任技術者”を加えるなど積算根拠の技術力の比重を高めることも考えたらどうか。

### 1.4 標高の高品質化

GNSS 観測の弱点は、高さにあるといえる。そこで TS による高低角観測値及び水準測量による比高観測値と結合するとともに、標高が正確な水準点上での GNSS 観測を行い、高さの正確な観測値との結合処理により、正確な標高データを得ることができる。

## 2. 計算式と観測値の重量

### 2.1 計算式

以下に、一般的な測地学の教科書に載せられているベクトル・行列表示による網平均計算に必要な計算式を示す。

・観測方程式

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{L} \quad (2-1)$$

ただし、 $\mathbf{v}$  は残差ベクトル

$\mathbf{A}$  は計画行列

$\mathbf{x}$  は未知数ベクトル

$\mathbf{L}$  は観測値を含む定数項ベクトル

・解

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{R} \quad (2-2)$$

ただし、 $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ 、 $\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$ 、 $\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$  は未知量の重み係数行列

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$  の対角要素は  $i$  番目の未知数の図形の強さを示す値である。「 $\wedge$ 」は推定値を表す。

・事後の単位重量当たりの標準偏差

$$\tilde{v}_i = |v_i| / \hat{\sigma}_0 \sqrt{v_i} \quad (2-3)$$

ただし、 $v$  は網の自由度

・未知数の  $i$  番目の標準偏差

$$\sigma_{x_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{ii}} \quad (2-4)$$

・残差の分散

$$\Sigma_{\tilde{v}} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{P} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T) = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\tilde{v}} \quad (2-5)$$

ただし、 $\mathbf{Q}_{\tilde{v}}$  は  $z$  残差の重み係数行列

・標準化された残差

$$\tilde{v}_{vi} = |v_i| / \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{ii}} \quad (2-6)$$

・観測量の推定値の分散

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \quad (2-7)$$

ただし、 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$  は観測量の重み係数行列

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$  対角要素  $r_i$  は  $i$  番目の観測値の「余剰数」で、 $r_i$  の合計が網の自由度  $v$  になる。

### 2.2 観測値の重量

異種観測値を同時処理する場合において、良く使われる重量の例を下記に示す。

重量  $p$  は、分散  $\sigma^2$  の逆数に比例するものとして、次式で定義されている。

$$p = \propto \frac{1}{\sigma^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \quad (2-8)$$

ここに  $\sigma_0^2$  は適当な定数であって、任意の数でスケールファクターと呼ばれることもある。 $\sigma_0^2 = 1$  とした重量を使うことで、各観測値の重量は次のようになる。

・方向観測の重量

$$p_d = 1/m_i^2$$

ただし、 $m_i$  は 1 方向当たりの事前の標準偏差 (単位 $''$ )

・距離測定 of 重量

$$p_s = 1/(m_s^2 + \gamma^2 S^2)$$

ただし、 $m_s$  は距離に依存しない標準偏差 (単位 m)、 $\gamma$  は距離  $S$  に依存する事前の標準偏差 (単位 m)

・比高観測の重量

$$p_h = 1/\sigma_h^2 S$$

ただし、 $\sigma_h$  は 1 km 当たりの観測比高の事前の標準偏差 (単位 m)、 $S$  は測定距離 (単位 km)

・高低角観測の重量

$$p_v = 1/\sigma_v^2$$

ただし、 $\sigma_v$  は高低角の事前の標準偏差 (単位 $''$ )

・GNSS 基線ベクトルの重量

$$\mathbf{P} = \Sigma^{-1}$$

ただし、 $\Sigma$  は基線ベクトルの観測値の分散・共分散行列

・座標観測の重量

$$\mathbf{P}_x = \Sigma_x^{-1}$$

ただし、 $\Sigma_x$  は座標の分散・共分散行列

## 3. 測量成果の品質評価

測量結果の品質は、大きく分けて次の方法によって評価される。

1. 計画段階：既知点数の配置や観測回数等測量作業の計画時に決めることができ、そ

の根拠となるのが網の図形の強さである。

2. 現地段階：閉合差による点検。
3. 最終段階：網平均計算による統計的仮説検定（①網の事後の単位重量当たりの標準偏差②標準化された観測値の残差）により評価を行う。

### 3.1 計画段階（網の図形の強さ）

網の図形の強さは、GNSS 測定の「DOP」に相当するもので、既知点の数及びその配置、観測の数によって決められる。一般的に、【①既知点数が多い②既知点の配置のバランスが整っている③観測数が多い】網の図形は強いといえる。

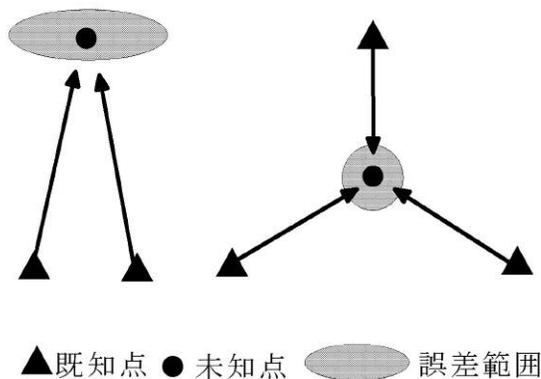


図 3.1 図形の強さ

直観的には見た目の網の混み具合で判断できるが、準則にも規定されている式 (2-2) に示す未知量の重み係数行列の対角要素  $q_{ii}$  により  $i$  番目の精度の判定ができ、 $q_{ii}$  の値が小さい程高い精度が得られる。同様に式 (2-7) における観測量の重み係数行列の対角要素  $r_i$  の数値からも判定できる。この  $r_i$  は、式 (2-7) に示した「余剰数 redundancy number」と呼ばれているもので  $0 \leq r_i \leq 1$  の範囲にあり、1 に近い値の場合、観測値の数が多いことを示し、0 に近い場合、観測値の数が少なく不良データを弾き出す力が小さい。

$q_{ii}$  及び  $r_i$  の数値を基に網の図形の強さを調べることができる。過去にも、精密基準点

測量の実施にあたっては、網の図形の強さが深く検討されたことがある（日本測量協会、昭和 55 年）。

### 3.2 現地点検

観測結果の閉合差等から、観測値の良否を確認し、不良観測値を排除する。

### 3.3 最終段階（統計的仮説検定）

準則第 43 条は、TS による網平均計算結果算出された「単位重量の標準偏差」の許容範囲を規定している。例えば、1 級基準点測量の水平網平均計算の場合「 $10''$ 」である。現在は、仮定網平均のような最小拘束解の結果から、 $\chi^2$ （又は F）分布を使った分散の統計的仮説検定を行い、重量の適正を含め網平均計算全体の良否を判定する。

#### ◆分散の検定

式 (2-3) に示された事後の基準分散  $\hat{\sigma}_0^2$  に関して帰無仮説

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \quad (3-1)$$

を検定する。ただし  $\sigma_0^2$  は、事前の基準分散で、 $\sigma_0^2 = 1$  として扱う。

まず、次の計算を行う。

$$\chi^2 = \hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2 = \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}} / \sigma_0^2 = \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}} \quad (3-2)$$

$\chi^2$  分布表から、自由度  $\nu$  及び有意水準  $\alpha$  を引数にして両側検定の場合の棄却域の値

$$\chi_{(\nu, 1-\alpha/2)}^2, \chi_{(\nu, \alpha/2)}^2$$

を求める。

$$\chi_{(\nu, 1-\alpha/2)}^2 < \chi^2 < \chi_{(\nu, \alpha/2)}^2 \quad (3-3)$$

であれば、帰無仮説は採択され、網全体に大きな問題を見出すことができなかつたことを示す。

$\chi^2$  が棄却域外となり、式 (3-3) が満足しない場合、帰無仮説は棄却され、網に不都合の問題があることになる。その不都合の原因は、次の 3 つである。

- ①観測値の重量が不適切な場合

- ②既知点座標誤差が大きい場合
- ③観測値に異常値が含まれる場合

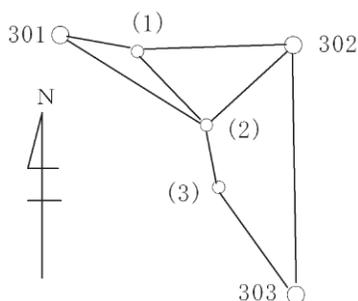


図 3.2 平均図 (国土地理院 HP より)

図 3.2 に示す GNSS 観測網に従って、①重量の選択②既知点数③観測値の良否、について調べた。その結果が表 3.1 に示されている。

表 3.1 GNSS 測量における分散の検定

既知点数	1	1	3	1
重量	固定	基線	固定	固定
自由度	9	9	15	9
$\chi^2$	6.3	288.5	841.2	44.7
$\chi^2_{\alpha/2}$	2.1	2.1	5.2	2.1
$\chi^2_{1-\alpha/2}$	21.7	21.7	30.6	21.7
採否	採択	棄却	棄却	棄却
標準偏差	0.8	5.7	7.5	2.2

①重量の選択：既知点が 1 点の場合は、準則の仮定三次元網平均計算に相当するもので、既知点の座標誤差の影響を受けない。準則に規定された事前の標準偏差水平 4 mm、高さ 7 mm による固定重量を使った場合、 $\chi^2 = 6.3$  は  $\chi^2_{(v,1-\alpha/2)} = 2.1$   $\chi^2_{(v,\alpha/2)} = 21.7$  の範囲内にあり、式 (3-1) の仮説は採択される。このときの事後の標準偏差  $\hat{\sigma}_0 = 0.8$  であって事前の標準偏差  $\sigma_0^2 = 1$  に近い値になっている。

基線解析の結果得られた重量を使うと、 $\chi^2 = 288.5$  で  $\chi^2_{(v,1-\alpha/2)} = 2.1$   $\chi^2_{(v,\alpha/2)} = 21.7$  の範囲外となり、仮説は棄却される。このときの事後の標準偏差  $\hat{\sigma}_0 = 5.7$  であって、事前の標準偏差  $\sigma_0^2 = 1$  から大きく離れた値になっている。棄却の原因は、分散が小さ

き重量が実際より大きすぎるためである。

②既知点数：固定重量を使って 3 点の既知点を固定すると、 $\chi^2 = 841.2$  となり、 $\chi^2_{(v,1-\alpha/2)} = 5.2$   $\chi^2_{(v,\alpha/2)} = 30.6$  の範囲外で、仮説は棄却される。棄却の原因は、既知点の座標誤差のためであろう。事後の標準偏差  $\hat{\sigma}_0 = 7.5$  であって、事前の標準偏差  $\sigma_0^2 = 1$  から大きく離れた値になっている。

③観測値の良否：図 3.2 に示す (3) -303 の基線の各成分に 5 cm を加え、故意に基線ベクトル観測に誤差があったようなデータとし網平均計算を行った。1 点固定・固定重量による計算結果は、 $\chi^2 = 44.7$  である。仮説は棄却されるが、事後の標準偏差  $\hat{\sigma}_0 = 2.2$  であって、基線解析結果の重量や 3 点固定の場合の事後の標準偏差 (5.7、7.5) より小さい。以上のように、事後の単位重量当たりの標準偏差  $\hat{\sigma}_0$  は、重量や既知点誤差の影響を大きく受けるが、観測値の誤差による影響は小さい。従って、個々の観測値の異常観測値の検出は、次に述べる残差の検定によって行われる。

**疑問：**この計算結果が示すように基線解析から得られた分散・共分散の重量では「単位重量当たりの標準偏差」の値が大きくなる。監督員から“大きすぎる”といわれたことがある。

**意見：**分散・共分散を使った重量が適切でないからで、観測が悪いからでない。機種により重量が異なり、網平均結果が異なるなど不合理もあり、そのスケールリングが必要である。重量として高低差による観測誤差の影響の考慮も必要である。

◆異常観測値の検索 (残差の検定)

異種観測値を同一基準で検定するため、次式 (3-4) に示された標準化された残差を使う。

$$\tilde{v}_{vi} = |v_i| / \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{vi}} \quad (3-4)$$

この式は  $\tau$  検定 (Pope,1971) と呼ばれるもので米国製の網平均計算で使われていることがある。 $\hat{\sigma}_0$  の代わりに  $\sigma_0$  を用いた標準正規分布に従う Baarda (1968) による方法もある。

表 3.2 は、図 3.3 に示す TS 観測網図の平均計算結果を示す。このデータは、点 (1) (2) 間の測定値に +10cm の誤差を故意に与え、同様に (1) (302) 間の距離 -10cm の誤差を故意に与えたものである。準則に規定された残差の許容範囲は 8 cm であるから、この測量結果は、準則では問題がないものとなる。標準化された残差で見ると、距離測定の方が

「3」を超えている。「 $3\sigma$ 」を棄却基準とすれば、距離測定に大きな誤差が含まれていると判断でき、これらの測定値は棄却される。

◆余剰数 (r)

r の総和 3 が網の自由度であり (式 2-7 参照)、網全体の観測値の数が少ないことを示し、不良観測値を弾き出す力 (power) に欠けている。そのため、不良観測値は、良い観測値にまで影響を与え、良い観測値をも悪者にしている。

4. 議論

本 WG で議論になった重要な点に関して述べる。

4.1 基線ベクトルの地上観測値への換算

GNSS の基線ベクトル ( $\Delta X \Delta Y \Delta Z$ ) から斜距離 S、高低角 V 及び方位角  $\alpha$  を計算し、平面上の xy 網平均が可能になる。方位角に (t-T) 補正及び真北方向角を補正すれば、方向角観測値になる。ただし、TS による方向観測とは異なる。同様に、距離 S を基準面上の値とし、s/S 補正すれば平面上の距離として扱える。

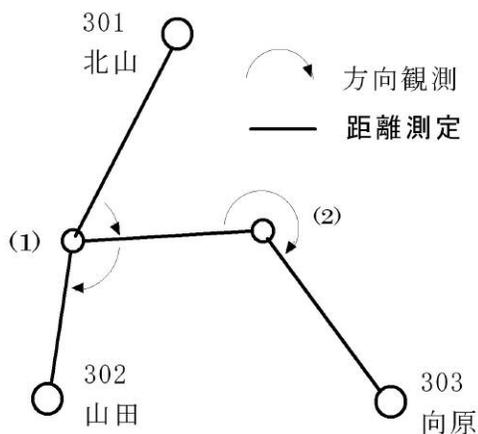


図 3.3 xy 網平均計算観測図 (国土地理院の例題による)

表 3.2 網平均計算結果の残差、標準残差及び余剰数 (r)

距離測定

NO1	NO2	観測値 m	器械高 m	目標高 m	化成 m	残差 m	平均値 m	標準残差	r
(1)	(2)	1240.139	1.300	1.300	.000	-.0343	1240.1047	5.43*	.29
(1)	302	1013.572	1.300	1.300	.000	.0392	1013.6112	5.49*	.40
301	(1)	1943.541	1.300	1.300	.000	.0517	1943.5927	4.76*	.61
(1)	303	1699.423	1.300	1.300	.000	-.0490	1699.3740	5.60*	.45

方向観測

NO1	NO2	観測値			対回	残差 秒	平均値			鉛直偏差 秒	標準残差	r
		度	分	秒			度	分	秒			
(2)	(1)	0	0	.00	2	-2.08	0	0	0.00	.0	2.66	.19
	303	228	13	22.00	2	2.08	228	13	26.16	.0	2.66	.19
(1)	301	0	0	.00	2	2.81	0	0	0.00	.0	2.83	.30
	(2)	56	6	22.00	2	-1.04	56	6	18.15	.0	.89	.42
	302	161	36	20.00	2	-1.76	161	36	15.43	.0	2.66	.14

【注】鉛直偏差は Laplace の式による鉛直線偏差の補正量である。計算は中根が研究用に開発した「3D結合網平均計算プログラム」による。

## 4.2 多角測量方式の見直し

多角測量方式は、平板測量の図根測量等に導入されたものである(大前他、昭和7年、168頁)。「2.1 網の図形の強さ」で述べたように、又、表3.2の計算例で示したように、1級基準点測量等骨格測量では「多角方式」に限定せず、観測量が多い方法の導入も必要であろう。

又、1級から4級までの同時処理は、網を非常に強くしているの、多角測量方式及び階層構造の見直しは重要課題となろう。

### まとめ

現行の準則は、日本の社会基盤の構築上一定の役割を果たしてきた。2008年にはJPGISの導入により国際的規範が導入された。今回議論した、欧米で利用されている3D結合網の実用化は、測量経費の節減及び正確な品質評価に大きく貢献し、G空間社会の基準点測量として活躍するであろう。準則第5条の「製品仕様書」の規定又は準則第17条の「新技術」の規定を活用する等、現行準則の規定に基づいて、実用化の道筋をつけることができる。

3D処理に関する観測方程式は、かなり古い時代の教科書(Heiskanen 他、1967)に示されていて、決して新しい技術ではないが、我国では馴染みが薄い。そうした背景もあり、WGでは必ずしも議論が十分にかみあったわけではない。今後の実用化にあたっては、すでに発売されているソフトウェアを使い、実務を先行させて体感することをお勧めする。例えば、TSによるxy網平均と高低網平均の同時処理である。そうすれば理屈抜きで、その必要性が理解できるであろう。

当WGは、2010年3月から2011年5月まで7回開催し、延べ43名が議論に加わった。この間2010年6月25日に国土地理院との意見交換会を行った。2011年度はメールによる意見交換を行い、最終的に報告書にまとめた。

なお、ライカジオシステムズ社からマニュアル等の資料の提供をいただいた。ここに感謝する。

(文責 WG長 中根 勝見)

### ■WGメンバー

中根 勝見 アイサンテクノロジー株式会社  
五十嵐祐一 株式会社ニコン・トリンプル  
大西 俊次 玉野総合コンサルタント株式会社  
沖西 邦夫 株式会社オオバ  
貞末 道昭 株式会社パスコ  
白戸丈太郎 アジア航測株式会社  
橋本 靖彦 ライカジオシステムズ株式会社  
(50音順)

### ■参考文献

- 1) Baarda W.: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks, Publication on Geodesy, New Series, Vol.2, No.5, Netherlands Geodetic Commission, 1968.
- 2) Heiskanen W.A. and Moritz, H.: Physical Geodesy, Freeman, San Francisco, 1967.
- 3) Pope A. J.: The statistics of residuals and the detection of outliers, NOAA Technical Report NOS 65 NGS 1, U.S. Department of Commerce, National Geodetic Survey, Rockville, Md, 1976.
- 4) 原田健久: 鹿島出版社、2001
- 5) 社団法人日本測量協会: 精密基準点測量(改定版)、昭和55年
- 6) 大前憲三郎、熱海景良、鈴木猶吉、園部 蒨: 陸地測量学、岩波書店、昭和7年