測地測量の基礎事項（2）＝展開法・投影法＝

中根　勝見[1]

はじめに

前回は楕円体・鉛直線偏差・ジオイドなど、測地学の最も基礎的事項を考察した。今回は、それらの基礎事項に基づく具体的な位置基準について考察する。

1．展開法と投影法

測地測量の処理は準拠楕円体面上で行うべきところであるが、ジオイド高および鉛直線偏差が未知であった時代には、ジオイドを楕円体とみなして、観測値をジオイドに展開して処理した。この処理は、観測値をジオイドへ展開することから「展開法（development method）」と呼ばれている。展開法に対して、ジオイド高および鉛直線偏差の影響を計算し、観測値を準拠楕円体面に投影して処理する方法は、「投影法（projection method）」と呼ばれている（Bomford, Geodesy, 1971, p120）。

わが国では、2002年度に改正測量法が施行される以前においては、展開法処理であった。改正測量法の施行に伴って、投影法の法律的根拠が出来上がった。

1-1 展開法

旧測量法第十一条は“距離及び面積は、水平面上の値で表示する。”と定めていた。ここでいう“水平面”は、そっくりそのまま“ジオイド面”と解釈するのでなく、凸凹の激しいジオイド面をなだらかな楕円体面に見立てたものと解釈すべきであろう。日本では、明治以来2001年度まで、100年余りにわたってこの展開法による処理が行われてきていた。

1-1-1 距離と角度の処理

展開法において、距離の観測値は、標高を使って基準面であるジオイド面に展開された。角度は、鉛直線偏差の化成等なんらの補正も行わずに観測角をそのまま処理した。

1-1-2 GPS観測値の処理

GPS観測値の処理にあたって、GPS基線ベクトルを［$\varDelta X, \varDelta Y, \varDelta Z$］とし、旧測量法時代は次式を使っていた。ただし、$N_{\mathrm{i}}$：卯酉線曲率半径、$H_{\mathrm{i}}$：標高、$\mathrm{e}^2$：第１離心率である。

$$\begin{bmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\\ \Delta Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_2\\ Y_2\\ Z_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}X_1\\ Y_1\\ Z_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}X_i\\ Y_i\\ Z_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(N_i+H_i)\cdot\cos\phi_i\cdot\cos\lambda_i\\ (N_i+H_i)\cdot\cos\phi_i\cdot\sin\lambda_i\\ \{(N_i\cdot(1-e^2)+H_i\}\cdot\sin\phi_i\end{bmatrix}i=1,2 \qquad (1\text{-}1)$$

観測方程式は次式で与えられた。当時はジオイド高が決められていなかったので、Hは楕円体高でなく標高が使われていた。

$$\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{bmatrix}=m_2\begin{bmatrix}\delta\phi_2\\ \delta\lambda_2\\ \delta H_2\end{bmatrix}-m_1\begin{bmatrix}\delta\phi_1\\ \delta\lambda_1\\ \delta H_1\end{bmatrix}+M+\begin{bmatrix}\Delta X^0\\ \Delta Y^0\\ \Delta Z^0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\Delta X_{ob}\\ \Delta Y_{ob}\\ \Delta Z_{ob}\end{bmatrix} \qquad (1\text{-}2)$$

ただし、上付き“0”は概算値、下付“ob”は観測値を表す。

[1] アイサンテクノロジー株式会社

$$m_i = \begin{bmatrix} -(M_i+H_i)\cdot\sin\phi_i\cdot\cos\lambda_i & -(N_i+H_i)\cdot\cos\phi_i\cdot\sin\lambda_i & \cos\phi_i\cdot\cos\lambda_i \\ -(M_i+H_i)\cdot\sin\phi_i\cdot\sin\lambda_i & (N_i+H_i)\cdot\cos\phi_i\cdot\cos\lambda_i & \cos\phi_i\cdot\sin\lambda_i \\ (M_i+H_i)\cdot\cos\phi_i & 0 & \sin\phi_i \end{bmatrix} i=1,2$$

ここに、M_iは子午線曲率半径、N_iは卯酉線曲率半径、H_iは標高である。

$$M = M_\xi \begin{bmatrix} \Delta X^0 \\ \Delta Y^0 \\ \Delta Z^0 \end{bmatrix} \xi + M_\eta \begin{bmatrix} \Delta X^0 \\ \Delta Y^0 \\ \Delta Z^0 \end{bmatrix} \eta + M_\alpha \begin{bmatrix} \Delta X^0 \\ \Delta Y^0 \\ \Delta Z^0 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} \Delta X^0 \\ \Delta Y^0 \\ \Delta Z^0 \end{bmatrix} s$$

$$M_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos\lambda \\ 0 & 0 & -\sin\lambda \\ \cos\lambda & \sin\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_\eta = \begin{bmatrix} 0 & -\cos\phi & -\sin\phi\sin\lambda \\ \cos\phi & 0 & \sin\phi\cos\lambda \\ \sin\phi\sin\lambda & -\sin\phi\cos\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\phi & -\cos\phi\sin\lambda \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\phi\sin\lambda & -\cos\phi\cos\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

ϕ，λ：調査地域内の任意の測地緯度・経度

ξ，η：調査地域の平均的鉛直線偏差（南北、東西方向成分）で未知数

α：網の鉛直軸の微小回転で未知数

s：網のスケールファクターで未知数

この観測方程式は、旧測量法における準拠楕円体上の基線ベクトルをジオイドへ展開する式であった。式（1-2）はBeis変換モデルと呼ばれていて、変換パラメータ［ξ，η，α，s］により日本測地系準拠楕円体からジオイドへ変換していた。ここでの処理は、WGS 84座標系から日本測地系への変換と勘違いされていた関係者もいたが、日本測地系準拠楕円体からジオイドへ展開するためのものである。

1-1-3 GPS観測値の「WGS 84座標系」から「日本測地系」への座標変換

旧測量法において、GPSの観測値である基線ベクトルは、「WGS 84座標系」に準拠した値である。これらの観測値は、何らかの方法で「日本測地系」の値に変換しなければならない。

旧測量法時代の1996年の公共測量作業規程解説と運用で解説された「三次元網平均計算」（124-125頁）は、“三次元網平均計算の処理方法には、日本測地系で行う方法とWGS 84系で行う方法がある。”と記し、さらに、“WGS 84系で三次元網平均計算を行う場合は、既知点の成果値をWGS 84系に変換し、WGS 84系上で三次元網平均計算を行った後、計算結果を日本測地系に変換しなければならない。ここでは、お互いの座標変換に使用する変換パラメータは同じものを使用しなければならない。”と解説していた。日本測地系の既知点の成果値をWGS 84系に変換するための変換パラメータは、公表された正確な値はなく作業者各自がつくらなければならず、WGS 84系で処理することは現実的でなかった。なお、日本測地系とWGS 84座標系との座標変換プログラム「TKY2WGS」が開発されていたが、この座標変換プログラムは基線解析のためのWGS 84の概算座標を得る目的のもので、既知点の座標変換に使用する目的ではなかった。しかし、当時は正確なWGS 84座標値が得られると勘違いしていた測量関係者も少なくなかった。

公共測量作業規程は、基線解析で得られた基線ベクトルをそのまま日本測地系の観測値として採用し、三次元網平均計算するよう定めていた。公共測量作業規程の処理は、「WGS 84座標系」の3次元直交座標系の3軸［X, Y, Z］と「日本測地系」の3次元直交座標系の3軸［X’, Y’, Z’］は互いに平行と仮定したものであった。公共測量における実際の三

次元網平均計算は、WGS84座標系上の観測値をそのまま日本測地系での観測値と仮定して処理する方法を使ってきた。公共測量作業規程の影響などもあり、GPS観測値そのものをWGS84座標系から日本測地系へ変換して使うものと勘違いしていた測量関係者も見られた。

1-2 投影法

楕円体高h、標高H、ジオイド高Nの関係は、近似的に次式で表すことができる。

1-2-1 距離観測値の処理

図4-1に示すように、地表上の2点P_1P_2間の距離S'が得られる。余弦法則により、次式が得られる。

$$(S')^2=(R+h_1)^2+(R+h_2)^2-2(R+h_1)(R+h_2)\cos\theta$$

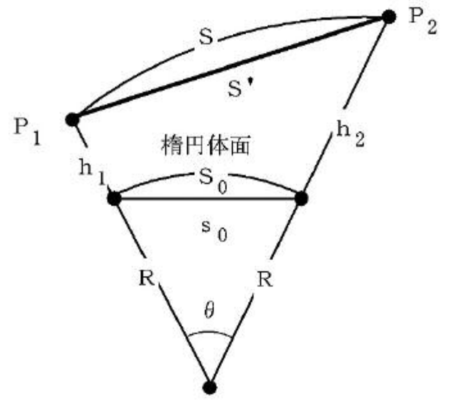

図1-1　距離観測値と楕円体面の関係

$s_0=2R\sin(\theta/2), S_0=R\theta, \sin(\theta/2)=(1-\cos\theta)^{1/2}$の関係式を使い、次式を導くことができる。

$$s_0=\sqrt{\{S'^2-(h_2-h_1)^2\}/(1+\frac{h_1}{R})(1+\frac{h_2}{R})} \quad (1\text{-}4)$$

ここに、Rは次式に示すP_1からP_2方向の方位をαとしたときの地球の半径$R\alpha$である。ただし、H：標高、Ng：ジオイド高、$h=H+Ng$：楕円体高。

$$\frac{1}{R_\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{M}+\frac{\sin^2\alpha}{N} \quad (1\text{-}5)$$

ここに、M：子午線曲率半径、N：卯酉線曲率半径である。式に示したように弦の距離s_0と弧の距離S_0は異なるが、公共測量において１km以内の距離なら$s_0=S_0$として処理可能である。

上記の式（1-4）は改正測量法の定義に基づく正確な計算式で、ジオイド高が既知であればよい。それに対して公共測量作業規程は、V：高度角、H：標高、N_M：平均ジオイド高、$R=6,370,000$mとして、旧測量法の式を踏襲した次式を用いている。

$$S_0=S\cos\{\frac{(V_1-V_2)}{2}\}\frac{R}{R+(\frac{H_1+H_2}{2})+N_M} \quad (1\text{-}6)$$

この式において高度角Vが用いられているので、鉛直線偏差の影響により、投影された距離は改正測量法第十一条に定められた準拠楕円体面のものではなく、法の定めに忠実な式とはいえない。

作業規程に定められた計算式（1-6）を使って、2点間の距離誤差dsを概算してみよう。鉛直線偏差をε、高度角V、2点間の高低差を$\varDelta H$とすれば次式が導き出される。

$$ds=\frac{dS_0}{dV}dV=S\sin V\cdot\varepsilon=\varDelta H\cdot\varepsilon$$

$\varepsilon=20''$、$\varDelta H=50$mとすれば、$ds=5$㎜となる。高低差の大きい調査地域、特に高層ビルの屋上点と地上点の取付観測結果、において無視できない誤差となろう。

1-2-2 角度観測値の処理

角度観測値は、次に示すラプラス（Laplace）の式により準拠楕円体面へ化成されなければならない。方位角の化成は$\varDelta\alpha_P$、高度角の化成は$\varDelta V_P$である。

$$\varDelta\alpha_P=\eta_P\tan\phi_P+(\xi_P\sin\alpha_P-\eta_P\cos\alpha_P)\times\cot\varsigma_P$$
$$\varDelta V_P=(\xi_P\cos\alpha_P-\eta_P\sin\alpha_P) \quad (1\text{-}7)$$

ここに、ξ_P及びη_PはP点におけるそれぞれ

南北及び東西成分の鉛直線偏差、ϕ_PはP点の緯度、α_P及びζ_PはそれぞれP点における目標の方位角及び天頂距離である。以上の式（1-4）、（1-5）、（1-6）、（1-7）は、「Torge, Geodesy, 2001, p239, 244」及び「The Australian Geodetic Datum Technical Manual, 2001」から引用した。

式（1-7）をみて分かるように、この化成には鉛直線偏差（ξ, η）が既知でなければならない。国土地理院は鉛直線偏差を定めていないので、角度観測値は準拠楕円体面に化成されていない。例えば、日本全国に配置された一二三等三角点約39,000点のうち80%余りの三角点の位置は、明治時代を中心にして測量された三角測量データを使って決められている。これらの三角測量データは式（1-7）に示されたラプラスの式により楕円体法線に化成されなければならないが、その化成は省略されたまま新しい座標を計算した。省略したために生じる誤差は、中根（2001）によって見積もられている。特に、高度角が大きい山岳地域において、鉛直線偏差の影響は無視できない。また、公共測量作業規程などでは、鉛直線偏差の影響を全て無視している。この結果生じる誤差については、中根（2002）により議論されている。特に、ビルの屋上点から地上点に取り付けるような場合、高度角が大きく鉛直線偏差の影響は無視できない。

1-2-3 旧測量法におけるGPS観測値の処理

国土地理院は1996年、「日本のジオイド96」を公表した。式（1-1）及び（1-2）において、標高の代わりに楕円体高を用いた場合、投影法処理なので得られた成果は日本測地系準拠楕円体上の値になる。従って、日本測地系の成果と整合を求めるためには、何らかの方法でジオイド面の値に変換しなければならない。例えば、北海道地域のジオイド高は－50m余りなので、2点間の1kmの距離誤差は8cmにもなる。実際のところ、公共測量作業規程では準拠楕円体からジオイドへの変換式が定められていなかった。どのような処理がなされてきたか、筆者は確かめていない。

1-2-4 改正量法におけるGPS観測値の処理

改正測量法において楕円体面が基準面となったので、式（1-2）における標高Hを楕円体高hに置き換えた次の式（1-8）がGPS測量の観測方程式となる。この場合、式（1-2）で使われ変換パラメータ［ξ, η, α, s］は基本的に必要がなくなった。ただし、新座標の不整合が大きい地域において、変換パラメータ［ξ, η, α, s］使うことができるが、その時のξ及びηは鉛直線偏差ではなく、GPS測量結果と新座標の不整合を調整するための微小回転角に相当する未知数である。

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = m_2 \begin{bmatrix} \delta\phi_2 \\ \delta\lambda_2 \\ \delta h_2 \end{bmatrix} - m_1 \begin{bmatrix} \delta\phi_1 \\ \delta\lambda_1 \\ \delta h_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X^0 \\ \Delta Y^0 \\ \Delta Z^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X_{ob} \\ \Delta Y_{ob} \\ \Delta Z_{ob} \end{bmatrix} \tag{1-8}$$

現在の公共測量作業規程の計算式集に記載されたGPSの観測方程式は、式（1-2）であり、旧測量法と同様ジオイド上の処理となっている。

1-2-5 投影法処理の座標系

図1-2は、測地座標系（geodetic system）［X, Y, Z］と局所測地座標系（local geodetic system）［n, e, u］の関係を示したものである。測地座標系が地球重心を原点とした重心系（geocentric system）であるのに対して、局所測地座標系は、観測点を原点とした測心座標系（topocentric system）である。「測地座標系」と一対のもので定義されるのが「局所測地座標系」である。局所測地座標系におけるPからQまでの測地方位角、測地天頂距

離、空間距離はそれぞれ［α，ζ，s］で表される。

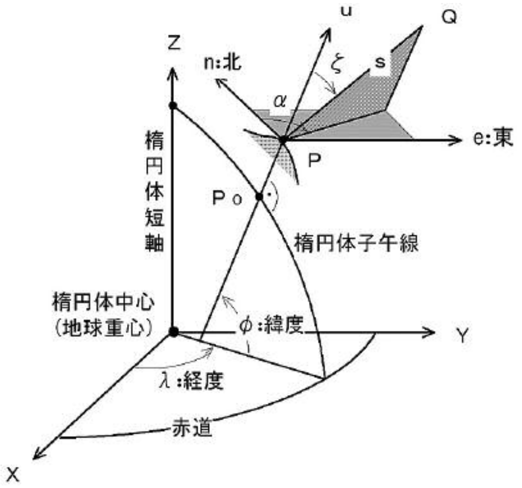

図1-2　測地座標系［*X, Y, Z*］と局所測地座標系［*n, e, h*］

各要素［α，ζ，s］と座標［n, e, u］の関係は次式であらわされる。ただし、［x, y, z］は、PQ間の測地座標差である。

$$\begin{bmatrix} n \\ e \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos\alpha\sin\zeta \\ s\sin\alpha\sin\zeta \\ s\cos\zeta \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}9)$$

$$R = \begin{bmatrix} -\sin\phi\cos\lambda & -\sin\phi\sin\lambda & \cos\phi \\ -\sin\phi & \cos\lambda & 0 \\ \cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda & \sin\phi \end{bmatrix}$$

公共測量作業規程は、式（1-9）において、α：測地方位角、ζ：観測天頂距離、s：空間距離を用いて、偏心計算式とし、「局所地平座標」と呼んでいる。

天文座標系（astronomic system）では、天文緯度・経度・標高［Φ，Λ，H］がその座標である。天文座標系における観測点を原点とした測心座標系は、局所天文座標系（local astronomic system）又は地平座標系（horizontal system）と呼ばれている（日本測地学会測地学の概観、1974、73頁）。ジオイドを基準面とした旧測量法において「地平座標」の用語の使用も考えられるが、準拠楕円体を基準面とした改正測量法では「局所測地座標」の用語を使うべきであろう。公共測量作業規程に定められた局所地平座標の計算要素として「測地方位角」と「観測高度角」が使われる。天文方位角を計算要素とする地平座標とも異なったものである。また、「地平座標系」は「局所座標系」なので、ことさら「局所地平座標系」と“局所”を付ける必要はない。現実は、測量士試験問題、各公共機関の作業規程などで「局所地平座標」のような不適切な用語が出回っているので、早い時期の修正が必要であろう。

■ 謝辞

2名の差読者には様々なご指摘をいただいた。深く感謝する。

■ 参考文献

1）The Australian Geodetic Datum Technical Manual, 2001.

2）Bomford, G.:Geodesy, 3rd edn, 1971, Clarendon Press, Oxford.

3）建設省大臣官房技術調査室監修：建設省公共測量作業規程運用と解説、日本測量協会、1996.

4）中根勝見：統合網平均の考察－鉛直線偏差の決定－、測地学会誌、47, pp.719-P726, 2001.

5）中根勝見：日本の鉛直線偏差、写真測量とリモートセンシング、Vol.41, NO5, 2002.

6）Torge W.:Geodesy（3rd.edn.）, Walter de Gruyter・Berlin・Newyork, 2001.

7）日本測地学会：測地学の概観、1974年。