

測地測量の基礎事項 (3) ＝座標変換＝

中根 勝見¹⁾

はじめに

2002年の改正測量法により、旧測量法時代の膨大な遺産の有効活用が現実のものとなった。有力な方法は、座標変換により、旧成果の測地成果2000への移行を行うことである。その有力なツールは、国土地理院が開発した「TKY2JGD」座標変換プログラムである。また、国土地理院が作成した「測地成果2000導入に伴う公共測量成果座標変換マニュアル」(以下、座標変換マニュアルという。)がある。これらは、改正測量法の実現に大きな役割を果たした。今回は、座標変換に関してより詳しく考察してみたい。特に、地主等お客様の要望である“座標変換に伴って面積及び図形が変化しない”という社会的要請に対して、測量業界の状況も考察してみたい。

1. 座標変換の数学モデル

2つ以上の座標系があるとき、それぞれの座標系が互いに関連付けられていれば、座標系ごとの座標値間の変換が可能になる。通常、各座標系に共通する「離散的」に分布する既知点の座標を基に「変換パラメータ」を求める。求められた変換パラメータにより未知点の座標変換を行うことができる。まず、基本的な座標変換の数学モデルを導き出して、具体的な適用例について考察を行う。

1.1 平面の座標変換の数学モデル

図1.1に示すように、2次元における (x, y)

座標系と (x', y') 座標系がある場合、P点の2つの座標値の関係は次式で表される。

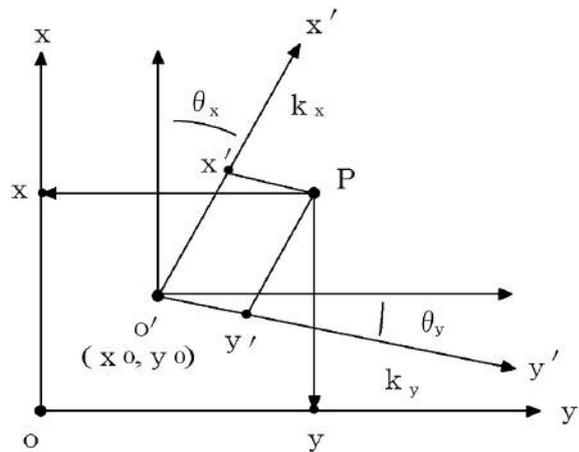


図1.1 (x, y) 座標系と (x', y') 座標系の関係

$$\begin{aligned} x &= x_0 + k_x x' \cos \theta_x - k_y y' \sin \theta_y \\ y &= y_0 + k_x x' \sin \theta_x + k_y y' \cos \theta_y \end{aligned} \quad (1.1)$$

図1.1をみても分かるように、 k_x 及び k_y はそれぞれ x 及び y 軸の縮率であり、又、 θ_x 及び θ_y はそれぞれ x 及び y 軸の回転量である。この式は、「座標変換マニュアル」に定められた「アフィン変換」の式である。行列表示では次式で表すことができる。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_x & -\sin \theta_y \\ \sin \theta_x & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$k_x = k_y$ 及び $\theta_x = \theta_y$ とした特別な場合、「相似変換」の式となる。

1.2 3次元座標変換の数学モデル

通常座標変換では次の3次元相似変換をわかっている。図1.2に示す $X = (X, Y, Z)^T$

¹⁾ アイサンテクノロジー株式会社

座標系と $X' = (X', Y', Z')^T$ 座標系との関係は次式で表される。ただし、上添字 "T" は転置をあらわす。

$$X = k \cdot R_z(\omega) R_y(\omega) R_x(\omega) X' + T \quad (1.3)$$

ここで、TとRについては次式が使われている。

$T = [T_x \ T_y \ T_z]^T$: 両座標系の原点移動量

$$R_x(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}$$

$$R_y(\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & 0 & -\sin \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega & 0 & \cos \omega \end{bmatrix}$$

$$R_z(\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

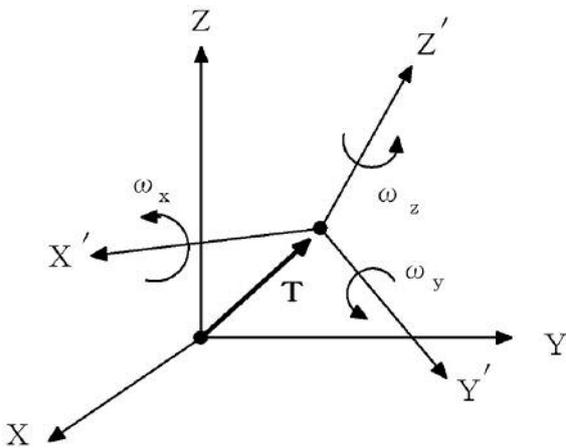


図1.2 3次元の場合の相似座標変換

上式において、回転角 ω が小さい場合、 $\sin \omega = \omega$ 、 $\cos \omega = 1$ と置けるので、次式が成立つ。ただし、 k は方向によらない一定の縮率とすると、 $k = 1 + s$ で表され、 s は微少量である。

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + (1+s) \begin{bmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

これは次式でベクトル表示ができる。

$$X = (1+s)RX' + T \quad (1.5)$$

この式は、WGS 84座標系とITRF座標系との間の座標変換式の元となっているものである。また旧測量法時代、GPS観測での基線解析に使うWGS 84座標系を求めるとき、日本測地系座標を X' 及びWGS 84座標を X とし、式 (1.4) において、 $s = 0$ 及び $\omega = 0$ とし、 $x_0 = -147.5\text{m}$ 、 $y_0 = 507.26\text{m}$ 、 $z_0 = 680.47\text{m}$ を使うこともあった (公共測量作業規程、平成7年、19頁)。

1.3 局所測地座標系の座標変換数学モデル

図1.3に示す関係式は次式で表される (Rapp, 1992, Geometric Geodesy, p-70, Leick, 1990, p-306)。

$$X = T + X_0 + (1+s)M(\phi, \lambda, a, \xi, \eta)(X' - X_0) \quad (1.6)$$

ただし、

$$M(\phi, \lambda, a, \xi, \eta) = aM_a + \xi M_\xi + \eta M_\eta + I$$

$$M_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos \lambda \\ 0 & 0 & -\sin \lambda \\ \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_\eta = \begin{bmatrix} 0 & -\cos \phi & -\sin \phi \sin \lambda \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \cos \lambda \\ \sin \phi \sin \lambda & -\sin \phi \cos \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_a = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \phi & -\cos \phi \sin \lambda \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda & -\cos \phi \cos \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

である。

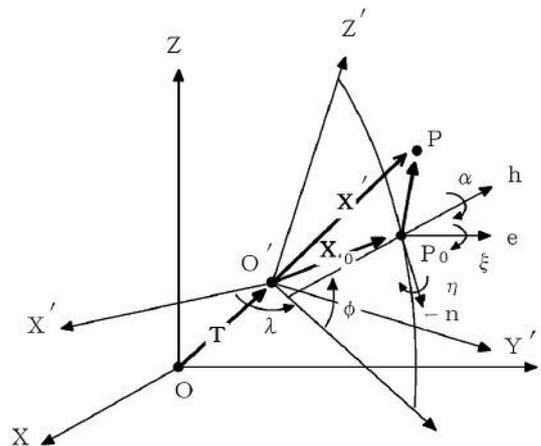


図1.3 Veis変換モデル

この式は、Veis変換モデルと呼ばれるもので、旧測量法におけるGPS測定の観測方程式に使われていた。

未知量 a 、 ξ 、 η 、 s はそれぞれ、「水平面の回転」、「鉛直線偏差の南北成分」、「鉛直線偏差の東西成分」及び「縮率の微少部分」をあらわす。 M_a 、 M_ξ 、 M_η は、 a 、 ξ 、 η 、等による微少変換量である。この変換により、日本測地系準拠楕円体面上で処理されるGPS観測値をジオイド面に展開することができた。

2. 日本測地系から世界測地系への座標変換

国土地理院の「座標変換マニュアル」は、日本測地系から世界測地系への座標変換手法を定めたものである。その座標変換マニュアルは、式 (1.1) 又は式 (1.2) 式を使っているが、日本測地系と世界測地系の平面は互いに平行であるとの仮定のもとで成立つ近似的な解決手法である。正確には、次の手順によって処理しなければならない。

以下の計算における記号は次のように扱う。日本測地系はTokyo Datumなので添字“TKY”、既知点 (given) は添字“GVN”、未知点 (unknown) は添字“UNK”、世界測地系は (Japanese Geodetic Datum 2000) なので添字“JGD”であらわす。

手順1：座標変換の既知点となるべき日本測地系平面直角座標 $(X_{TKY}, Y_{TKY})_{GVN}$ を日本測地系の経緯度座標 $(\phi_{TKY}, \lambda_{TKY})_{GVN}$ に換算する。

手順2：既知点を日本のジオイド96によって日本測地系ジオイド高 N_{TKY} を求め、それを標高 H に加え、その既知点の日本測地系の楕円体高 h_{TKY} を求める。

手順3： $(\phi_{TKY}, \lambda_{TKY}, h_{TKY})_{GVN}$ から日本測地系地心直交座標 $(X_{TKY}, Y_{TKY}, Z_{TKY})_{GVN}$ を

次式により計算する。ただし、記号 N は卯酉線曲率半径である。 e は第1離心率である。ここで使う楕円体要素はベッセルの値を使う。また、ジオイド高は日本のジオイド96を使う。

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}_{TKY} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\phi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\phi\sin\phi \\ \{N(1-e^2)+h\}\sin\phi \end{bmatrix}_{TKY} \quad (2.1)$$

手順4：日本測地系地心直交座標 $(X_{TKY}, Y_{TKY}, Z_{TKY})_{GVN}$ に原点のシフト量 $x_0 = -147.5m$ 、 $y_0 = 507.26m$ 、 $z_0 = 680.47m$ を加え、世界測地系座標に変換する。このとき変換された世界測地系座標を次式とする。

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}_{GVN} = \begin{bmatrix} -147.54 \\ 507.26 \\ 680.47 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}_{TKY} \quad (2.2)$$

手順5：例えばGPS測量で直接得られた既知点の世界測地系座標を $(X_{JGD}, Y_{JGD}, Z_{JGD})$ とする。

手順6：式 (1.4) の式において、 (X', Y', Z') $_{GVN}$ とし、また、 $(X_{JGD}, Y_{JGD}, Z_{JGD})$ を (X, Y, Z) $_{GVN}$ とする。この計算において、7つの座標変換パラメータ $(x_0, y_0, z_0, \omega_x, \omega_y, \omega_z, s)$ を求める。

手順7：各未知点は、手順1～手順4までの手続きにより未知点の地心直交座標 (X', Y', Z') $_{UNK}$ を求める。

手順8：手順6までの手続きによって求められた7変換パラメータをもった式 (1.4) を使ってその未知点の世界測地系座標 (X, Y, Z) $_{UNK}$ へ変換する。

手順9：未知点の世界測地系座標である地心直交座標 (X, Y, Z) $_{UNK}$ を次式により、世界測地系の経緯度座標 $(\phi_{JGD}, \lambda_{JGD}, h_{JGD})$ $_{UNK}$ に換算する。ここで使う楕円体要素はGRS80の値を使う。また、ジオイド高は日本のジオ

イド2000を使う。

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{JGD}} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\phi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\phi\sin\phi \\ \{N(1-e^2)+h\}\sin\phi \end{bmatrix}_{\text{JGD}} \quad (2.3)$$

手順10：世界測地系経緯度座標（ $\phi_{\text{JGD}}, \lambda_{\text{JGD}}, h_{\text{JGD}}$ ）UNKを世界測地系平面直角座標（ $x_{\text{JGD}}, y_{\text{JGD}}$ ）UNKに換算する。

以上の手続きによる座標変換が正確な方法である。図2.1にその手順を示してある。

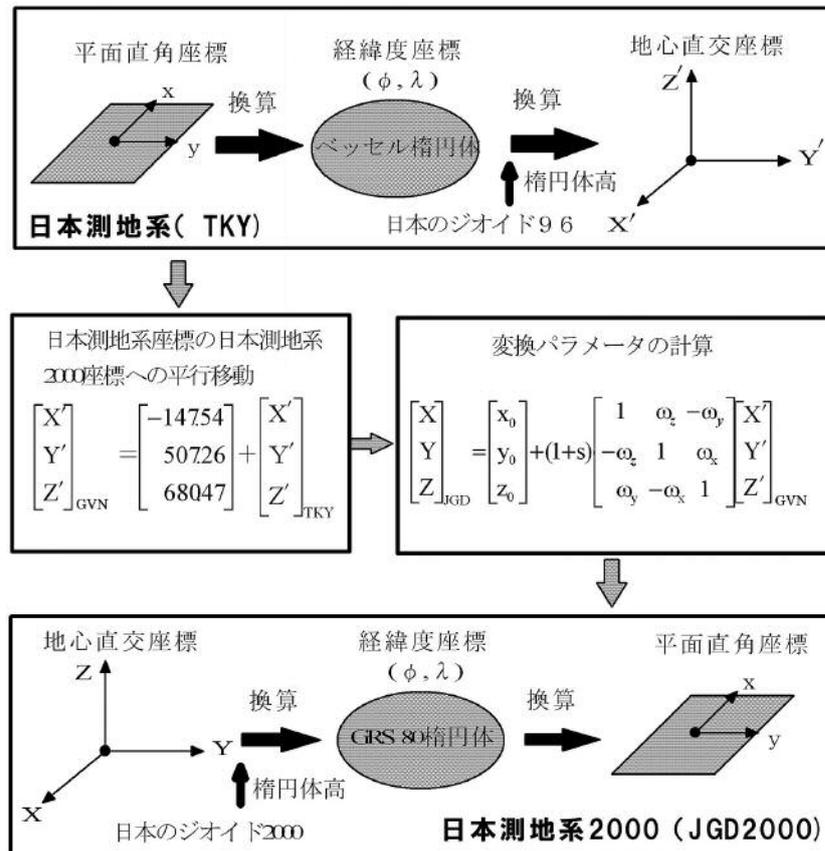


図2.1 日本測地系から日本測地系2000への座標変換手順

3. 混合網平均計算

座標変換式は、2次元のアフィン変換の場合は式 (1.1) 及び3次元の相似変換の場合は式 (1.4) で与えられている。これらの式において、 (x', y') 及び (X', Y', Z') は変換されるべき日本測地系の座標を表し、 (x, y) 及び (X, Y, Z) は世界測地系座標を表している。日本測地系及び世界測地系等いずれの座標も誤差をもっているため、全ての座標は確率論的な扱いにしなければならない。このような解を求める手法は「混合モデル」と呼ばれているものである。

式 (1.1) を再録する。この式において、 $(x,$

$y)$ 及び (x', y') 共に確率変数として扱う。

$$\begin{aligned} x &= x_0 + k_x x' \cos \theta_x - k_y y' \sin \theta_y \\ y &= y_0 + k_x x' \sin \theta_x + k_y y' \cos \theta_y \end{aligned} \quad (3.1)$$

それぞれの補正値を (v_x, v_y) 及び $(v_{x'}, v_{y'})$ として、上式を式 (3.2) のように扱う。

$$\begin{aligned} x + v_x &= x_0 + k_x (x' + v_{x'}) \cos \theta_x - k_y (y' + v_{y'}) \sin \theta_y \\ y + v_y &= y_0 + k_x (x' + v_{x'}) \sin \theta_x + k_y (y' + v_{y'}) \cos \theta_y \end{aligned} \quad (3.2)$$

式 (3.1) は線形方程式であるが、式 (3.2) は非線形方程式である。したがって、式 (3.2) を線形化し次の観測方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k_x \cos \theta & -k_y \sin \theta \\ 0 & 1 & k_x \sin \theta & k_y \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_{x'} \\ v_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x' & 0 & -y' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x' & 0 & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ k_x \cos \theta_x \\ k_x \sin \theta_x \\ k_y \sin \theta_y \\ k_y \cos \theta_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

上式における未知数、 $k_x \cos \theta_x$ 、 $k_x \sin \theta_x$ 、 $k_y \sin \theta_y$ 、 $k_y \cos \theta_y$ は、次式によって個々の未知数を求めることができる。

$$\begin{aligned} k_x &= \sqrt{(k_x \cos \theta_x)^2 + (k_x \sin \theta_x)^2} \\ \theta_x &= \tan^{-1}(k_x \sin \theta_x / k_x \cos \theta_x) \\ k_y &= \sqrt{(k_y \cos \theta_y)^2 + (k_y \sin \theta_y)^2} \\ \theta_y &= \tan^{-1}(k_y \sin \theta_y / k_y \cos \theta_y) \end{aligned} \quad (3.4)$$

式 (3.3) はベクトル表示で次のように表すことができる。

$$Bv = Ax + W$$

この式の解は、次式で表される (Mikhail, 1981, p244、中根, 2001, p154)。

$$\hat{x} = (A^T (BP^{-1}B)^{-1} A^T (BP^{-1}B)^{-1} W)$$

ただし、Pは観測値の重みである。

4. 最小2乗コロケーション

複数の座標系間を関連付けるため、座標変換パラメータを求める方法を述べてきた。上記に述べた変換パラメータの数は、最大7つであった。多項式を使って複数の座標系間を関連付ける方法を使えば、よりきめ細かい関連付けも可能になる。又は、国土地理院が開発したTKY2JGDに使った「クリギング法」もきめ細かい座標系間の分布を表すことができる。そうした数ある手法のなかで、「最小2乗コロケーション」が最も有力であると筆者

は考えている。

最小2乗コロケーションに関しては、ほとんどの測地学の教科書 (例えば、Bomford, 1980, p720) で説明されていて、測地学では一般的な課題であって決して特殊なものではない。身近なところでの実用化は、天文ジオイドの推定 (Ganeko, 1977)、日本のジオイド96における重力ジオイドとGPS/水準ジオイドの結合 (Fukuda and Murakami, 1997)、東海地方の地殻変動の推定 (Xia and Fujii, 1992)、GPS/水準による詳細ジオイド高の推定 (中根・黒石, 1995) 等がある。今回は座標の分布の推定に最小2乗コロケーションを使う。

4.1 最小2乗コロケーションの数学モデル

最小2乗コロケーションの前提は、「均一性」及び「等方性」が成立つ場で適用できるものである。均一性は、2点間の相関関係は、位置に関係したものでなく、距離だけによることである。等方性は、2点間の相関関係が方向に関係しないことである。地震断層などが生じた不連続な場又は行政界に生じた不連続な座標系の場等では適用できない。

図4.1は、回帰直線

$$x = ad + b$$

を仮定し最小2乗法により、係数a及びbを推定する図をあらわしている。既知点A及びCの近傍における未知点P及びQのそれぞれの座標差は、次の値となる。

$$x_P = ad_P + b \quad x_Q = ad_Q + b$$

この推定値 x_P 及び x_Q は、既知点付近ではそれ

らの既知座標差 x_A 及び x_C との間で、残差 v_A 及び v_C に相当する食い違いが生じてしまうことになる。補間結果は、既知点付近において既知点の観測座標差と大きな食い違いを生じる場合がある。

式(4.1)に示した($x=ad+b$)をトレンドと考え、既知点において観測座標差と補間計算座標座の間に生じた残差(v)を単に誤差として扱うのではなく、次式のように信号(s)とノイズ(n)に分けて考える。

$$v = s + n$$

$$x_A = ad_A + b + s_A + n_A$$

$$x_B = ad_B + b + s_B + n_B$$

$$x_C = ad_C + b + s_C + n_C$$

その様子を図4.2に示してあるが、最小2乗コロケーションの大きな特徴は、信号が物理的の意味をもっていることである。本論文における信号の持つ意味は、比較的小さい領域における座標変換量を示している。

上式において、次の条件に基づいて解を得る。

$$\sum_{i=1}^k n_i^2 = \text{最小} \quad \sum_{i=1}^k s_i^2 = \text{最小} \quad (4.4)$$

図4.2に示したトレンドの数学モデルとしては、2次式($x=ad^2+bd+c$)又はbi-cubic splineでもよいが、目的に適した式の物理的意味を考える必要がある。平面の座標変換におけるトレンドとして本論文は、①平行移動②相似変換③アフィン変換などを考える。

4.2 最小2乗コロケーションの数学解

混合モデルを使わない場合、式(3.3)は行列表示で次のように表すことができる。

$$v = Ax + W$$

この式の解は、次式で表される。

$$\hat{x} = (A^T C^{-1} A)^{-1} A^T C^{-1} W$$

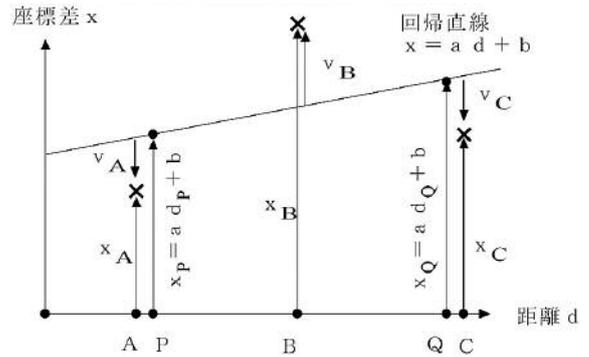


図4.1 回帰直線による未知点の座標差の推定 (v : 残差)

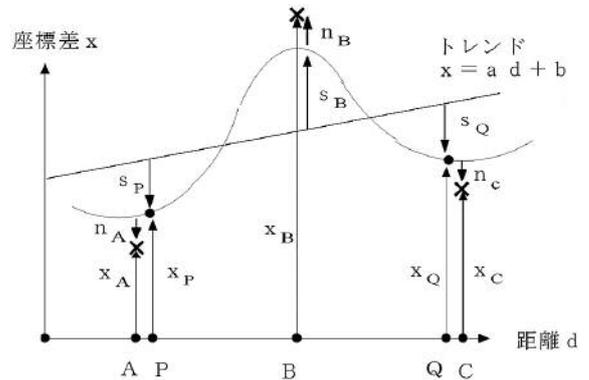


図4.2 最小2乗コロケーション
トレンド、信号(s)、ノイズ(n)の推定ができる

ただし、 \bar{C} は観測値の共分散で、信号の共分散 C とノイズの共分散 D を加えたものである。信号は、次式で表される。

$$\hat{s}_p = C_p^T \bar{C}^{-1} (W - A\hat{x})$$

ここに、 C_p は未知点と既知点間の共分散である。

重みは、経験的な値を用いることもあるが、2点間の距離 D に関する次式のように解析的に扱われることが多い。

$$C(D) = C(0) \exp(-k^2 D^2)$$

ここに k は定数、 $C(0)$ は自己分散である。

信号の共分散の様子は図4.3に示されているように、距離 D により指数関数的に共分散が減少していくのである。実際の計算では先験的にガウス関数の関数形を仮定するが、第1次近似の試算から求めた経験的共分散から求める。

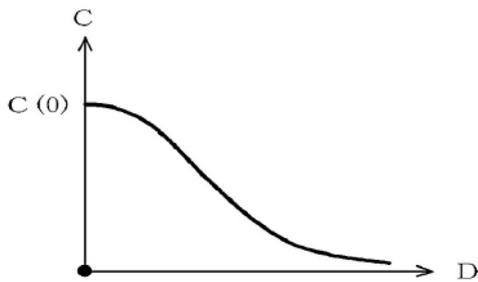


図4.3 共分散関数

なお、詳細に内容を調べたい方は、「Moritz H.: Least Squares Collocation, Deutsche Geodatische Kommission, Reihe A: Theoretische Geodesie Heft Nr. 75, 1973.」が比較的わかりやすい。国土地理院の図書室に保管されている。

4.3 最小2乗コロケーション法の座標変換マニュアルへの適用

国土地理院の座標変換マニュアルでは、式(1.1)又は式(1.2)に示した観測値は等精度として扱っているので、式(4.6)及び式(4.7)に示した分散 \bar{C} は単位 $\bar{C}=1$ 行列で、無次元の値となる。また、未知点と既知点間の共分散 C_p の要素 w_{pi} は、無次元の次式で表すことができる。ただし、 s_{pi} は未知点Pから既知点iまでの距離で、重みは距離の逆数としてある。

$$w_{pi} = (1/s_i) / \sum_{i=1}^n (1/s_i) \quad (4.9)$$

$$C_p = [w_{p1} \ w_{p2} \ \dots \ w_{pi} \ \dots \ w_{pn}] \quad (4.10)$$

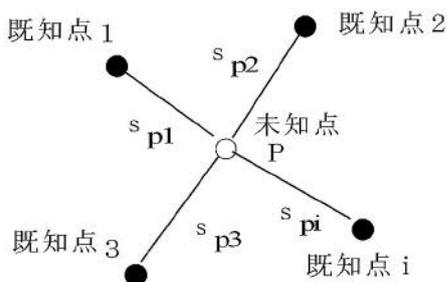


図4.4 既知点の残差の補間 (座標変換マニュアル重み付補間)

式(4.7)において推定残差 \hat{v} は次式で表される。

$$\hat{v} = (W - Ax)$$

従って、式(4.7)、(4.9)、(4.10)、(4.11)によって得られた信号は、国土地理院の座標変換マニュアルに定められた「重み付補間」である。

以上をまとめると、式(4.6)によって座標変換マニュアルに定められたアフィン変換の変換パラメータが計算できる。変換パラメータを求める計算の結果、既知点において残差が生じる。これら残差を式(4.7)、(4.9)、(4.10)、(4.11)によって未知点に配布する。配布にあたっての重みは、距離の逆数とする。すなわち、座標変換マニュアルに定められた「アフィン変換」と「重み付補間」を組み合わせ、最小2乗コロケーション相当の結果を得ることができる。

4.4 最小2乗コロケーションの座標変換計算例

上記に述べた例を川崎市における実際のデータに基づいて、以下に検証する。

4.4.1 既知点の標準偏差

弊社が開発した商品名「平成検地/Wide」の中にある座標変換機能を使って計算した結果を図4.5に示してある。図4.5において、既知点は(1, 2, 3, 4, 301, 302, 304)の7点、未知点は(4403, 5654, 5696, 5706, 43552)の5点である。7つの既知点においてGPS観測が実施されているので、各点において、日本測地系及び世界測地系座標があり、変換パラメータを求めることができる。相似変換なので、2点の既知点があれば、変換パラメータは求まるが、この場合7点の既知点から最小2乗法により変換パラメータを求めた。変換パラメータを求めた後の残差の数値は、図4.5の矢印及

び左表に示されている。これらの残差から求めた標準偏差は、27mmとなっている。

4.4.2 相似変換による未知点の座標変換精度

図4.5に示した7点の既知点の変換パラメータから未知点（4403, 5654, 5696, 5706, 43552）の5点の座標を推定した。点検のため、これら未知点5点においてGPS観測を実施した。この際、実測値に基づいて得られた座標値が正しいものと仮定して、変換パラメータから計算した推定値と比較した。図4.6は、はその結果である。座標差をベクトルであらわし、

数値は左の表に示してある。未知点の較差から求めた標準偏差は、27mmとなっている。

4.4.3 最小2乗コロケーションによる未知点の座標変換精度

図4.7は、最小2乗コロケーションによって信号を加味して得られた未知点の較差である。つまり、最小2乗コロケーションによって得られた未知点の座標の推定値とGPS観測によって直接得られた座標の差である。この較差から求めた未知点の標準偏差は、17mmとなり、信号を考慮していない図4.6の結果の標準偏差27mmよりかなり改善されている。

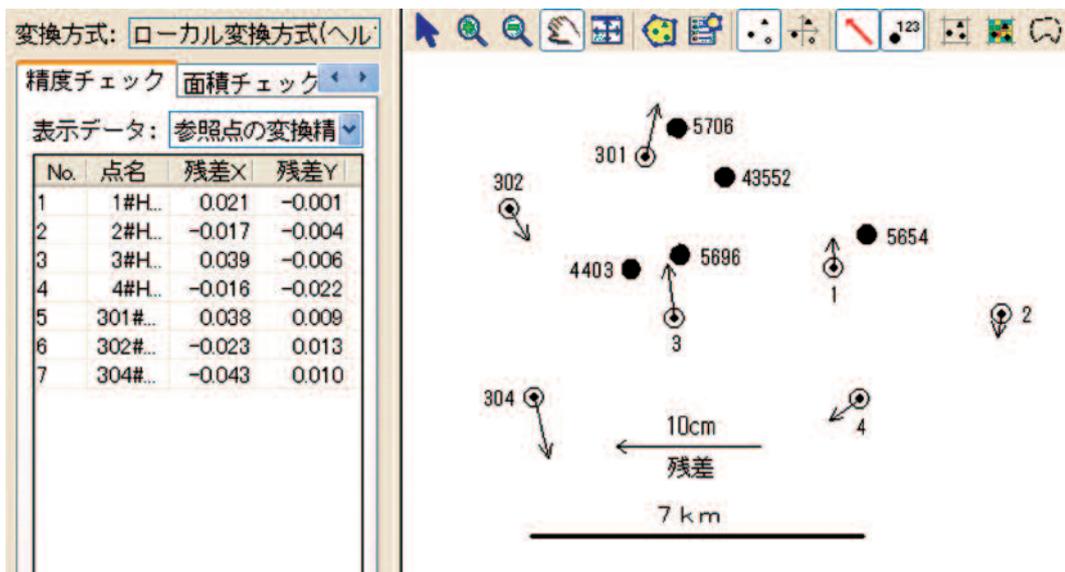


図4.5 相似（ヘルマート）変換における既知点（◎）の残差ベクトル（●は未知点）

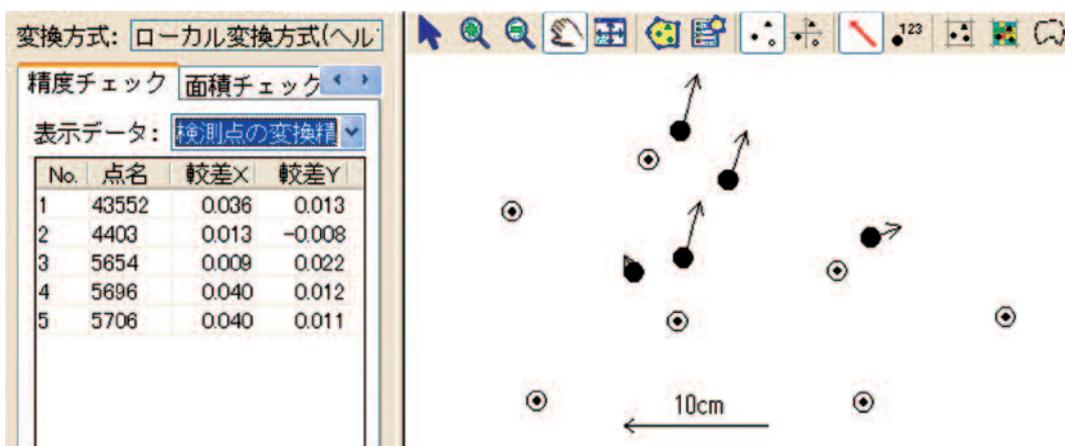


図4.6 相似変換によって得られた未知点の座標変換の較差

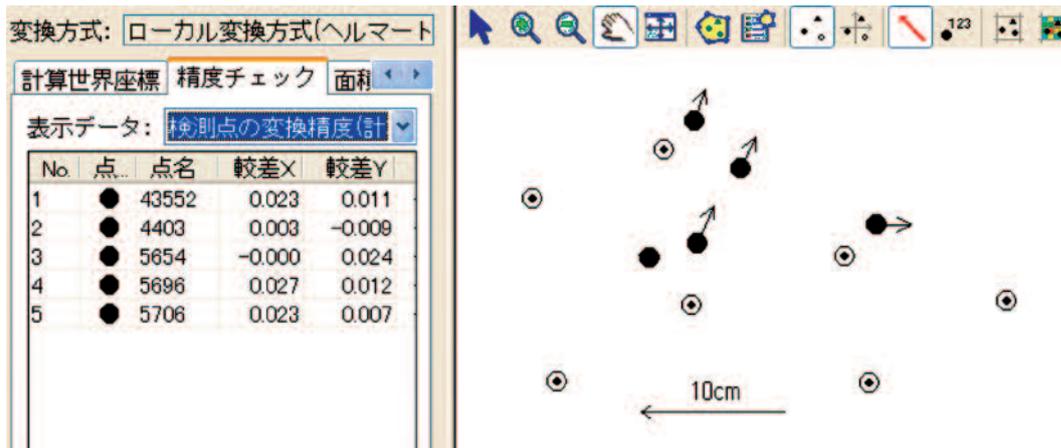


図4.7 最小2乗コロケーションによって得られた未知点の座標変換の較差

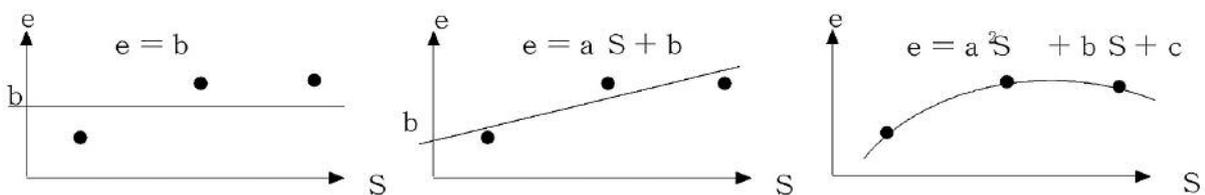


図4.8 GPS観測値の誤差モデル

5. AICによるモデルの選択

我々が測量で扱う数学モデルは、ピタゴラスの定理など限られたもので、数学モデルに誤差はないものとして処理してきている。GPS観測の誤差モデルを推定する場合、aは距離によらない誤差、bは距離に比例する誤差として、次の3つを仮定する。

- ・ 誤差eと距離Sは無関係である場合、 $e = b$
- ・ 誤差eと距離Sが比例する場合、 $e = aS + b$
- ・ 誤差eと距離Sが2次式の場合、 $e = aS^2 + bS + c$

この場合、最適なモデルの選択を行わなければならない。3回の観測値からモデルを推定するとき、図4.8の右端の2次式の場合には未知数a、b、c3つなので一意に定まる。この場合の標準偏差は零であり、観測値とモデルの“あてはめ”がよくなる。次に、誤差モデルの式と観測値の関係をみると、 $e = b$ より $e = aS + b$ の方が、残差が小さいことは図4.8から読み取れる。未知数がbだけの一つ $e = b$ の場合より、未知数がa、bの2つある $e = aS + b$ の

場合の方が、“あてはめ”がよいことになる。一般的に、未知数が多いときの方が少ない場合より“あてはめ”がよく、標準偏差は小さくなる。

従って、標準偏差が小さいからといって、 $e = aS^2 + bS + c$ が最も優れた誤差モデルとはいえない。GPS測量の誤差の性質からこの式は本来対象外のモデルで、 $e = b$ と $e = aS + b$ のどちらが優れた誤差モデルかを検定することになる。坂元慶行他（1985）によるAIC（Akaike Information Criterion）は、モデルの選択に関する次式を提供している。

$$AIC = (n \log 2\pi + n) + n \log \sigma^2 + 2(m + 1)$$

ここに、nは観測値の数、mは未知数の数、対数は自然対数、 $\sigma^2 = \hat{v}^T \hat{v} / n$ である。

5.1 計算例

下表に示す光波測距儀による観測値があるとき、距離によらない誤差モデル $e = a$ と距離に依存する誤差モデル $e = a + bS$ についての検

定を行う。

距離 (km)	0	1	2	3	4	5	6
誤差 (mm)	3	7	5	4	11	7	5

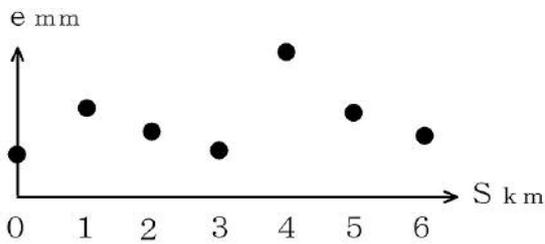


図4.9 光波測距儀による測定誤差

- ・ 誤差モデル $e=a$ の場合、 $n=7$ 、 $m=1$
 $\hat{a} = (3+7+5+4+11+7+5) / 7 = 6$
 $\sigma^2 = \{(3-6)^2 + (7-6)^2 + (5-6)^2 + (4-6)^2 + (11-6)^2 + (7-6)^2 + (5-6)^2\} / 7 = 42/7 = 6$

式の第1項は共通項なので第2項だけを計算する。

$$AIC_1 = n \log \sigma^2 + 2(m+1) = 7 \times \log 6 + 2 \times (1+1) = 7 \times 1.79 + 4 = 16.5$$

- ・ 誤差モデル $e = a + \hat{b}S$ の場合、 $n=7$ 、 $m=2$
 $a=4.71$ 、 $b=0.43$ 、 $\sigma^2=5.27$

を得て、次の計算結果を得る。

$$AIC_2 = n \log \sigma^2 + 2(m+1) = 7 \times \log 5.27 + 2 \times (2+1) = 7 \times 1.66 + 6 = 16.5 = 17.6$$

従って、次の結果は、 $e=a$ の誤差モデルの方が適当であることを示している。

$$AIC_1 = 16.5 < AIC_2 = 17.6$$

次表の場合

距離 (km)	0	1	2	3	4	5	6
誤差 (mm)	2	7	5	4	11	7	13

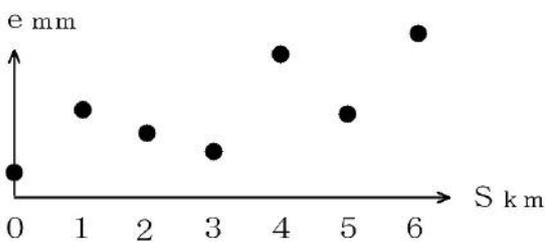


図5.0 光波測距儀による観測誤差

$$AIC_1 = 21.9, AIC_2 = 17.4$$

を得て、 $e=a+bS$ のモデルの方が適当と判断できる。

図4.9を見て誤差の距離の依存度は明白ではない。一方、図5.0は直感的に $e=a+bS$ のモデルの方が適当であることが分かる。このように、モデルの選択は直感に頼るのではなく、理論的に判定できるのである。

5.2 AIC利用上の注意

- ・ 観測値の数と未知数の数が等しいとき ($n=m$)、モデルは一意に定まる。 n が m よりかなり大きい場合に有効であるが、通常 $m < 2\sqrt{n}$ がおおよそその目安となる。

・ AICはその絶対値の大きさに意味があるのではなく、その差に意味がある。その差が1以上なら、有意とされる。例えばモデルAとBのAICが

$$AIC_A = 9832521.32 \quad AIC_B = 9832522.81$$

であれば、その差は1より大きくモデルAの方が良いことになる。

$$AIC_A = 0.000000023 \quad AIC_B = 0.510000000$$

の場合、その差は1より小さいので、どちらのモデルが良いか判定できない。

5.3 まとめ

表5.1は、トレンドとして（平行移動、相似変換、アフィン変換）を用いた場合又は信号を配布した場合と配布しない場合における未知点の標準偏差を計算した結果である。トレンドの数学モデルとしては、アフィン変換が最も優れた結果を示している。既知点にお

表5.1 (SD)：単位mm

トレンドモデル	既知点のSD	未知点のSD		AIC
		LSC	LSC	
平行移動	69	46	30	124.4
相似変換	27	27	17	102.3
アフィン変換	24	16	13	102.8
重み付補間	—	—	30	—

る残差を信号として扱った場合である最小2乗コロケーション (LSC) による結果は、30、17、13mmとなって、単なるトレンドの変換結果46、27、16mmより明らかに良い結果を示している。

なお、座標変換マニュアルに示された「重み付補間」は、表5.1に示された「平行移動に信号補正をした」(SD=30mm)ものに相当する。また、AICの評価は、数値が小さい場合そのモデルが優れていることをあらわしている。弊社のソフト上では図5.1のように表示されている。上記の例では、相似変換 (102.263) とアフィン変換 (102.807) の差は1以下なので、双方のモデルに優位性はない。

6. TINアフィン変換

都市再生街区基本調査成果の活用に関し、古い時代の地籍調査の成果等の利活用を目的として、世界測地系への移行に関する座標変換手法を提案している (国土調査課 (平成17年3月)、以下報告書という)。報告書は、「TINアフィン変換」なる用語を使った座標変換を提案している。この用語は、東京大学清水英範教授による「GISで現代に蘇る江戸絵地図の世界」(第31回国土地理院研究発表会、平成14年6月)をお手本にしているようである。清水教授は江戸の絵図を神社等の不動物を基準に、幾何補正を施し現代に蘇らそうという試みであった。その手法は、TIN (Triangulated Irregular Network) とアフィン変換による部分的線形変換法であった。清水教授の説明書のなかには「TINアフィン変換」なる用語はどこにも見当たらなかった。報告書は、それらの用語を重ね「TINアフィン変換」という用語を作り出したものと推定できる。報告書で述べられている「TINアフィン変換」の内容を考察してみることにする。

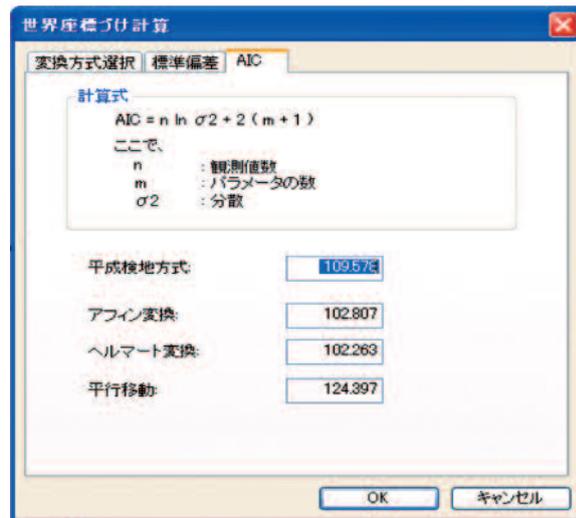


図5.1 AICの数値表示

6-1 座標変換に伴う測量誤差の処理

平面におけるアフィン変換の変換パラメータは6つである。従って、新旧座標 (観測値) をもった既知点 (業務報告書では準拠点と呼んでいる) が3つ以上ある場合、6つの変換パラメータは一意に定まらない。最小2乗法などで調整計算を行って処理するのであるが、既知点では平均値と観測値の2つの座標値が存在することになる。その差は残差と呼ばれている。最小2乗コロケーションでは、残差は信号とノイズに分けられ、信号は未知点に配分されているので、未知点の座標値は準拠点近傍で平滑的に処理される。アフィン変換などの場合で残差が大きいと、新旧の両座標をもった準拠点の極めて近傍では、準拠点の座標値と座標変換された未知点の座標値に大きな不整合を生じることになる。その様子は、図4.1及び図4.2を参照していただきたい。

準拠点における残差の処理は、最小2乗コロケーションを使わない場合、単三角形ごとに変換パラメータを求める方法がある。報告書でいう「TINアフィン変換」のことである。「単三角形の各頂点に東西・南北の座標差が2つずつあり、合計6つの観測値が得られ、変換パラメータは6であるので、6つの変換パ

ラメータは一意に定まる。「TINアフィン変換」法を用いれば、わずらわしい測量誤差の処理から開放されることになる。

測量の観測値は必ず誤差を持つ。その誤差を信号から切り離し、良質な測量成果を提供できるよう最善の処理を行うのが測量士の社会的使命である。「TINアフィン変換」法は、誤差処理をせず信号にまぜて処理する安易な方法で、信号と誤差の区別がつかず精度評価が困難であり、「TINアフィン変換」法の適用は変換対象となる成果の内容、変換の目的および要求精度を充分考慮したうえで慎重に対応しなければならない。

6-2 三角形の選択

最良なTINは、現実にはほとんど存在しないが、大きさの等しい正三角形でつくられた網が最良である。図6.1は、実際のTINの例である。TINの変換パラメータの値は三角形の大きさ及び図形に依存するところが大きく、図6.1の場合三角形が個々に異なっているので、三角形により変換パラメータは大きく異なる事になる。

TINにおける三角形組成の方法は、作業者の任意性に依存するところが大きい。その結果、作業者の思惑などに左右され作業者依存の測量成果がつくられるなど、安定した成果をつくりだす仕組みになっていない。図6.1の場合でも、担当者の気分によっては点線で区切られた三角形を選択するかもしれない。

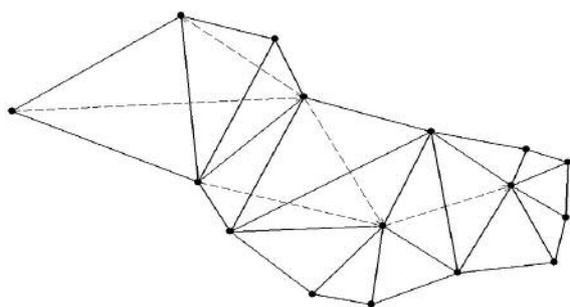


図6.1 TINの例

6-3 座標変換成果の不整合

地主等お客様が最も重要視する事は、座標変換に伴って土地の「面積」及び「図形」が変わらないことである。公共座標値が正確であるかどうかは二次的問題である。「TINアフィン変換」法は、個々の三角形ごとに変換パラメータがつくられているので、隣接する三角形ごとに異なった座標変換が行われる。例えば、本来直線道路であるべきものが、隣接三角形で折れ線に変換されることもある。直線道路がジグザグ道路になる可能性もある。

以上みてきたように、「TINアフィン変換」法は、座標変換の正確性が要求される手法として必ずしも適したものとはいえず、実証実験や点検等により要求精度の範囲内か否かを常に確認する必要がある。地図調整等で、部分的な歪を他に与える影響を少なくするという限定的な座標変換において、「TINアフィン変換」法以外に選択肢がない場合ならともかく、変換手法が多々あるので、所定の精度を持つ測量成果を長期にわたり保存することを考慮すると、「TINアフィン変換」法を選ぶことについては慎重にならねばならない。

あとがき

2002年度から改正測量法が施行された。大きな課題の一つが「座標変換」であったし、現在でも座標変換の重要性は変わらない。筆者は、改正測量法が円滑に施行されるための「勉強会」を全国で行ってきた。最近はほとんどなくなったものの、合計では100回近くになる。対話したお客様は1万人近くになる。こうした活動を通じて痛切に感じるのが、わが国の測地測量の技術水準の向上が不可欠であるということである。

市民の不動産などへのニーズは高く都市地域などでは±1cmを要請されるし、また、社会的ニーズも基盤整備として高精度三次元測

位結果を要請される時代である。厳密性に欠けるTINアフィン変換法による成果は時間が経つほど追試が出来なくなり将来成果が混乱する恐れがあり、早急に改善する必要があると考える。

測量業界の収入が半減してきた状況下で、その新しい業の発展のために我々測量技術者は精進を積み重ねしっかりした技術に基づいて、お客様にその時代の最高の精度で最良の測量成果を提供することが必要ではないかと指摘し、「座標変換」を主題としてここでは問題提起をさせていただいた。

■ 謝辞

最後に、2人の査読者には、最小2乗コロケーションのもつ深い意味及び現在の測量業界への座標変換の適用方法等について教えていただきました。ここに感謝する次第です。

■ 参考文献

- 1) 建設省大臣官房：建設省公共測量作業規程、平成7年。
- 2) Rapp R. H.: Geometric Geodesy, p-70、1992.
- 3) Leick A.: GPS SATELLITE SURVEYING, Jhon Wiley & Sons, 1990.
- 4) Mikhail E. M. and Gracie, G.: Analysis and Adjustment of Survey Measurements, Van Northland Reinhold Company. 1981.
- 5) 中根勝見：測量データの3次元処理、東洋書店、2001.
- 6) Bomford G. Geodesy 4edn, Clarendon Press Oxford, 1980.
- 7) Ganeko T.: An Astrogeodetic Geoid of Japan, J.Geophys. Res., 82,2490-2500, 1977.
- 8) Fukuda Y. and M. Murakami: Improvement of JGEOID 93 by the geoidal heights derived from GPS/Leveling survey, International Association of Geodesy Symposia, Vol. 117, Segawa et al, (eds.), Gravity, Geoid and Marine Geodesy, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1977.
- 9) Xia S. and Y. Fujii, 1992: Contemporary Vertical Crustal Movement in the Tokai District and its Neighborhood, Central Japan. Jour. Phys. Earth. 40.657-676, 1992.
- 10) 中根勝見、黒石裕樹：日本の測地測量における統合処理の考察＝ジオイド高の考察を中心として＝、国土地理院時報84、9-18頁、1995.
- 11) Moritz H.: Least Squares Collocation, Deutsche Geodatische Kommission, Reihe A: Theoretische Geodesie Heft Nr.75, 1973.
- 12) 国土地理院：測地成果2000導入に伴う公共測量成果座標変換マニュアル。
- 13) 坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎：情報量統計学、共立出版社、1985.
- 14) 国土交通省土地・水資源局国土調査課、社団法人日本国土調査測量協会：平成16年度 都市再生街区基本調査成果活用に関する検討業務報告、平成17年3月。
- 15) 国土地理院：第31回国土地理院技術研究発表会、平成14年6月。